第６講　場合の数・確率⑷

1　表の出る確率が p，裏の出る確率が q である硬貨を用意する．ここで p，q は正の定数で，$p+q=1$ を満たすとする．座標平面における領域を $D=\{(x,\ y)\,|\,0\leqq x\leqq 2,\ 0\leqq y\leqq 2\}$ とし，D 上を動く点Ｑを考える．Ｑは点 $(0,\ 0)$ から出発し，硬貨を投げて表が出れば x 軸方向に $+1$ だけ進み，裏が出れば y 軸方向に $+1$ だけ進む．なお，この規則で D 上を進めないときには，その回はその点にとどまるものとする．

⑴　硬貨を４回投げてＱが点 $(2,\ 2)$ に到達する確率 P_4 を求めよ．

⑵　硬貨を５回投げて５回目に初めてＱが点 $(2,\ 2)$ に到達する確率 P_5 を求めよ．

⑶　$P_5=\dfrac{1}{9}$ のとき，p の値を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 AとBの2チームが試合を行い，どちらかが先に k 勝するまで試合を繰り返す．各試合でAが勝つ確率を p，Bが勝つ確率を q とし，$p+q=1$ とする．AがBより先に k 勝する確率を P_k とおく．

(1) P_2 を p と q で表せ.

(2) P_3 を p と q で表せ.

(3) P_4 を p と q で表せ.

(4) $\dfrac{1}{2}<q<1$ のとき，$P_4<P_3$ であることを示せ.

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 [1]　n を 2 以上の整数とし，袋の中に，白玉が 5 個，赤玉が n 個入っているとする．この袋から 2 個の玉を同時に取り出すとき，取り出した玉が白玉と赤玉 1 個ずつである確率を p_n とし，また，取り出した白玉の個数を X とする．

(1)　p_n を求めよ．

(2)　p_n が最大になる n の値と，そのときの p_n の値を求めよ．

(3)　X の期待値が 0.625 になるとき，n の値を求めよ．

[2]　N を 2 以上の自然数とする．1 から N までの番号を 1 つずつ書いた N 枚のカードから 2 枚を同時に取り出し，そのうち大きい番号を X とし，小さい番号を Y とする．

(1)　i を 1 以上 N 以下の自然数とするとき，$X=i$ となる確率 p_i および $Y=i$ となる確率 q_i を求めよ．

(2)　X の期待値 E_1 および Y の期待値 E_2 を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第６講　場合の数・確率(4)

数直線上の点Ｐは，原点Ｏを出発して，次のルールに従って移動するとする．
「1つのさいころを振り，3以下の目が出たときには正の方向に1，5以上の目が出たときには負の方向に1，それぞれ動く．また，4の目が出たときは動かない．点Ｐの座標が -1 になったら，さいころを振るのをやめ，点Ｐはそこにとどまる．それ以外のときは，さいころをまた振る．」
さいころを多くとも3回まで振り，移動を終えた後の点Ｐの座標を X とする．$X=-1$ となる移動の方法は［ア］通りあり，確率は $\dfrac{\boxed{\text{イウ}}}{\boxed{\text{エオカ}}}$ である．$X=1$ となる移動の方法は［キ］通りあり，確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$ である．よって，X の期待値 $E(X)$ は $\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセソ}}}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第6講　場合の数・確率(4)

1　表の出る確率が p，裏の出る確率が q である硬貨を用意する．ここで p，q は正の定数で，$p+q=1$ を満たすとする．座標平面における領域を $D=\{(x,\ y)\,|\,0\leqq x\leqq 2,\ 0\leqq y\leqq 2\}$ とし，D 上を動く点Qを考える．Qは点 $(0,\ 0)$ から出発し，硬貨を投げて表が出れば x 軸方向に $+1$ だけ進み，裏が出れば y 軸方向に $+1$ だけ進む．なお，この規則で D 上を進めないときには，その回はその点にとどまるものとする．

(1)　硬貨を4回投げてQが点 $(2,\ 2)$ に到達する確率 P_4 を求めよ．

(2)　硬貨を5回投げて5回目に初めてQが点 $(2,\ 2)$ に到達する確率 P_5 を求めよ．

(3)　$P_5=\dfrac{1}{9}$ のとき，p の値を求めよ．

(1)　4回投げて表が2回，裏が2回出るときで，その確率は

$$P_4=\frac{4!}{2!2!}p^2q^2=\boldsymbol{6p^2q^2}$$

(2)　題意を満たすのは，4回投げた後 $(2,\ 1)$ または $(1,\ 2)$ に位置し，その後それぞれ裏，表が出るときである．4回投げた後に

$(2,\ 1)$ にいるのは，表が3回，裏が1回出るとき

$(1,\ 2)$ にいるのは，表が1回，裏が3回出るとき

よって　$P_5={}_4C_1p^3q\times q+{}_4C_1pq^3\times p=4p^2q^2(p+q)=\boldsymbol{4p^2q^2}$

(3)　$P_5=\dfrac{1}{9}$ より　$p^2q^2=\dfrac{1}{36}$　つまり　$pq=\dfrac{1}{6}$

これと　$p+q=1$ より，p，q は2次方程式　$t^2-t+\dfrac{1}{6}=0$　の2解である．

$6t^2-6t+1=0$　より　$t=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{6}$　　したがって　$\boldsymbol{p=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{6}}$

2　AとBの2チームが試合を行い，どちらかが先に k 勝するまで試合を繰り返す．各試合でAが勝つ確率を p，Bが勝つ確率を q とし，$p+q=1$ とする．AがBより先に k 勝する確率を P_k とおく．

(1)　P_2 を p と q で表せ．

(2)　P_3 を p と q で表せ．

(3)　P_4 を p と q で表せ．

(4)　$\dfrac{1}{2}<q<1$ のとき，$P_4<P_3$ であることを示せ．

勝者を左から順に列挙することとする．

(1)　AがBより先に2勝するのは，AA，ABA，BAAの3通りのみ．

よって　$P_2=p^2+pqp+qp^2=\boldsymbol{p^2(2q+1)}$

(2)　最後の回を除くと，Aは2勝し，Bは多くて2勝である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

Bが0勝のとき，AAの1通り

Bが1勝のとき，A，A，Bの順列で　${}_3C_1=3$（通り）

Bが2勝のとき，A，A，B，Bの順列で　${}_4C_2=6$（通り）

最後の回はAが必ず勝つ．よって

$$P_3=(p^2\cdot1+p^2q\cdot3+p^2q^2\cdot6)\cdot p=\boldsymbol{p^3(6q^2+3q+1)}$$

(3)　(2)と同様に $P_4=p^4(1+{}_4C_1\cdot q+{}_5C_2\cdot q^2+{}_6C_3\cdot q^3)=\boldsymbol{p^4(20q^3+10q^2+4q+1)}$

(4)　$\dfrac{1}{2}<q<1$ のとき　$p=1-q$ より

$$P_3-P_4=p^3\{(6q^2+3q+1)-(1-q)(20q^3+10q^2+4q+1)\}$$
$$=p^3(20q^4-10q^3)=10p^3q^3(2q-1)>0$$　よって　$P_4<P_3$

3 [1]　n を2以上の整数とし，袋の中に，白玉が5個，赤玉が n 個入っているとする．この袋から2個の玉を同時に取り出すとき，取り出した玉が白玉と赤玉1個ずつである確率を p_n とし，また，取り出した白玉の個数を X とする．

(1)　p_n を求めよ．

(2)　p_n が最大になる n の値と，そのときの p_n の値を求めよ．

(3)　X の期待値が0.625になるとき，n の値を求めよ．

(1)　$p_n=\dfrac{{}_5C_1\cdot{}_nC_1}{{}_{n+5}C_2}=\boldsymbol{\dfrac{10n}{(n+5)(n+4)}}$

(2)　$p_n<p_{n+1}$ とすると　$\dfrac{10n}{(n+5)(n+4)}<\dfrac{10(n+1)}{(n+6)(n+5)}$

$n(n+6)<(n+1)(n+4)$　よって　$n<4$　すなわち　$n\leqq3$

よって

$n=2,\ 3$ のとき，$p_n<p_{n+1}$　$n=4$ のとき，$p_n=p_{n+1}$　$n\geqq5$ のとき，$p_n>p_{n+1}$

つまり　$p_2<p_3<p_4=p_5>p_6>p_7>\cdots\cdots$

したがって，$\boldsymbol{n=4,\ 5}$　のとき最大値　$\boldsymbol{p_4=p_5=\dfrac{5}{9}}$

(3)　$X=1$ のとき　確率は　p_n

$X=2$ のとき　確率は　$\dfrac{{}_5C_2}{{}_{n+5}C_2}=\dfrac{20}{(n+5)(n+4)}$（$=q_n$ とする）

よって，X の期待値 $E(X)$ は　$E(X)=1\cdot p_n+2\cdot q_n=\dfrac{10n+40}{(n+5)(n+4)}=\dfrac{10}{n+5}$

$E(X)=0.625=\dfrac{5}{8}$ より　$\dfrac{10}{n+5}=\dfrac{5}{8}$　よって　$\boldsymbol{n=11}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 [2]　N を 2 以上の自然数とする．1 から N までの番号を 1 つずつ書いた N 枚のカードから 2 枚を同時に取り出し，そのうち大きい番号を X とし，小さい番号を Y とする．

⑴　i を 1 以上 N 以下の自然数とするとき，$X=i$ となる確率 p_i および $Y=i$ となる確率 q_i を求めよ．

⑵　X の期待値 E_1 および Y の期待値 E_2 を求めよ．

⑴　$X=i$ となるとき

Y は 1 から $i-1$ までの $i-1$ 枚から 1 枚取り出せばよい（$i\geqq 2$ のとき）．

よって　$p_i=\dfrac{{}_{i-1}\mathrm{C}_1}{{}_N\mathrm{C}_2}=\dfrac{i-1}{\dfrac{N(N-1)}{2}}=\boldsymbol{\dfrac{2(i-1)}{N(N-1)}}$

$p_1=0$ であるから，この式は $1\leqq i\leqq N$ で成り立つ．

$Y=i$ となるとき

X は $i+1$ から N までの $N-i$ 枚から 1 枚取り出せばよい（$i\leqq N-1$ のとき）．

よって　$q_i=\dfrac{{}_{N-i}\mathrm{C}_1}{{}_N\mathrm{C}_2}=\boldsymbol{\dfrac{2(N-i)}{N(N-1)}}$

$q_N=0$ であるから，この式は $1\leqq i\leqq N$ で成り立つ．

⑵　$$E_1=\sum_{i=1}^{N} i\cdot\frac{2(i-1)}{N(N-1)}=\frac{2}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(i^2-i)$$

$$=\frac{2}{N(N-1)}\left\{\frac{1}{6}N(N+1)(2N+1)-\frac{1}{2}N(N+1)\right\}$$

$$=\frac{2}{N(N-1)}\cdot\frac{1}{6}N(N+1)(2N+1-3)=\frac{2(N+1)(N-1)}{3(N-1)}=\boldsymbol{\frac{2}{3}(N+1)}$$

$$E_2=\sum_{i=1}^{N} i\cdot\frac{2(N-i)}{N(N-1)}=\frac{2}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(-i^2+Ni)$$

$$=\frac{2}{N(N-1)}\left\{-\frac{1}{6}N(N+1)(2N+1)+\frac{1}{2}N^2(N+1)\right\}$$

$$=\frac{2}{N(N-1)}\cdot\frac{1}{6}N(N+1)(-2N-1+3N)=\boldsymbol{\frac{1}{3}(N+1)}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第６講　場合の数・確率(4)

数直線上の点Ｐは，原点Ｏを出発して，次のルールに従って移動するとする．
「1つのさいころを振り，3以下の目が出たときには正の方向に1，5以上の目が出たときには負の方向に1，それぞれ動く．また，4の目が出たときは動かない．点Ｐの座標が-1になったら，さいころを振るのをやめ，点Ｐはそこにとどまる．それ以外のときは，さいころをまた振る．」
さいころを多くとも3回まで振り，移動を終えた後の点Ｐの座標をXとする．$X=-1$となる移動の方法は［ア］通りあり，確率は$\dfrac{\boxed{イウ}}{\boxed{エオカ}}$である．$X=1$となる移動の方法は［キ］通りあり，確率は$\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケコ}}$である．よって，$X$の期待値$E(X)$は$\dfrac{\boxed{サシ}}{\boxed{スセソ}}$である．

正の方向（右）に動くことをR$\left(確率\ \dfrac{1}{2}\right)$，負の方向（左）に動くことをL$\left(確率\ \dfrac{1}{3}\right)$，動かないことを×$\left(確率\ \dfrac{1}{6}\right)$で表す．

$X=-1$となるのは，順にL，×L，××L，RLLのときの**4**通りである．

その確率は　$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\mathbf{\dfrac{49}{108}}$

$X=1$のときは，順にRRL，RLR，R××，×R×，××Rの**5**通りである．

その確率は　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^2+\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{6}+\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\cdot\dfrac{1}{2}=\mathbf{\dfrac{5}{24}}$

$X=2$となるのは，順にRR×，R×R，×RRである．

その確率は　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\cdot\dfrac{1}{6}\times 3=\dfrac{1}{8}$　である．

$X=3$となるのは，RRRのときのみで

その確率は　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$　である．

よって　$E(X)=-1\cdot\dfrac{49}{108}+1\cdot\dfrac{5}{24}+2\cdot\dfrac{1}{8}+3\cdot\dfrac{1}{8}=\mathbf{\dfrac{41}{108}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。